

**CONCURSUL NAȚIONAL DE MATEMATICĂ APLICATĂ**  
**"ADOLF HAIMOVICI"**  
**ETAPA NAȚIONALĂ 22- 24 mai 2009**

**Filiera tehnologică: profil servicii, profil resurse naturale și protecția mediului**

**CLASA a XII-a**

**I.** Fie mulțimea de matrice  $M = \left\{ I_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}; A = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -i \end{pmatrix}; B; C \right\} \subset M_2(\mathbb{C})$ .

Știind că  $(M, \cdot)$  este grup, determinați matricele  $B$  și  $C$ . Cu  $B$  și  $C$  astfel determinate demonstrați că mulțimea  $M$  este grup față de înmulțirea matricelor.

**II.** Se dă polinomul cu coeficienți întregi de forma  $P(X) = (n+1)X^n - 5nX^{n-1} + a_2X^{n-2} + a_3X^{n-3} + \dots + a_n$ ,  $n \in \mathbb{N}^*$  cu rădăcinile  $x_k \in [k, k+1]$  pentru  $k = 1, 2, 3, \dots, n$ .

a) Demonstrați că  $n = 2$ .

b) Determinați polinoamele  $P$  care verifică condițiile date.

**III.** Fie funcția  $f : (0, \infty) \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $f(x) = \frac{\ln x}{\sqrt{x}}$ .

a) Determinați primitiva funcției  $f$  care se anulează pentru  $x = e^2$ .

b) Arătați că orice primitivă a funcției  $f$  este crescătoare pe  $[1, \infty)$ .

c) Calculați aria suprafeței plane cuprinse între graficul funcției  $f$ , axa  $Ox$  și dreptele de ecuații  $x = \frac{1}{e}$  și  $x = e$ .

**IV.** Se consideră funcția continuă  $f : [1, 4] \rightarrow \mathbb{R}$ , care satisface egalitatea:

$$\int_1^2 f^2(x^2) dx - 2 \int_1^2 f(x^2) dx = \int_1^4 f(x) dx - \frac{19}{3}.$$

a) Calculați  $\int_1^2 [f(x^2) - (x+1)]^2 dx$ .

b) Determinați funcțiile  $f$  care verifică egalitatea dată.

**Nota:** Timp de lucru 3 ore.

Toate subiectele sunt obligatorii.

Fiecare subiect este notat cu punctaje de la 0 la 7.